

Soient :

n_0 le nombre de personnes convaincues au départ ;

n_p le nombre de personnes convaincues p mois plus tard ;

α le nombre de personnes convaincues chaque mois.

Au bout de p mois, le nombre de personnes convaincues est la somme du nombre de personnes déjà convaincues auparavant (n_{p-1}) et du nombre de personnes convaincues au cours du mois p (αn_{p-1}). Ainsi $n_p = n_{p-1} + \alpha n_{p-1} = (\alpha + 1)n_{p-1}$.

Illustration par l'exemple :

Au bout d'un mois, le nombre de personnes nouvellement convaincues est αn_0 , il y a donc au total $n_1 = n_0 + \alpha n_0 = (\alpha + 1)n_0$ personnes convaincues.

Au bout de deux mois, le nombre de personnes nouvellement convaincues est αn_1 , il y a donc au total $n_2 = n_1 + \alpha n_1 = (\alpha + 1)n_1 = (\alpha + 1)^2 n_0$ personnes convaincues.

Au bout de trois mois, le nombre de personnes nouvellement convaincues est αn_2 , il y a donc au total $n_3 = n_2 + \alpha n_2 = (\alpha + 1)n_2 = (\alpha + 1)^3 n_0$ personnes convaincues.

On devine que le nombre de personnes convaincues au bout de p mois est $n_p = (\alpha + 1)^p n_0$.

Montrons-le par récurrence sur p ($p \in \mathbb{N}^*$).

Pour $p = 1$, on obtient bien $n_1 = (\alpha + 1)n_0$ (en utilisant la formule initiale).

Soit p tel que $n_p = (\alpha + 1)^p n_0$, montrons qu'alors $n_{p+1} = (\alpha + 1)^{p+1} n_0$.

$n_{p+1} = (\alpha + 1)n_p$ (en utilisant la formule initiale).

$n_{p+1} = (\alpha + 1)(\alpha + 1)^p n_0$ (en utilisant l'hypothèse de récurrence).

$n_{p+1} = (\alpha + 1)^{p+1} n_0$.

Donc pour tout p strictement positif, on a bien $n_p = (\alpha + 1)^p n_0$.

*Par exemple, avec une seule personne convaincue au départ ($n_0 = 1$), si chaque personne en convainc 4 autres par mois ($\alpha = 4$), le nombre de personnes convaincues en un an est : $n_{12} = (4 + 1)^{12} * 1 = 5^{12} \approx 244$ millions.*

Exprimons p en fonction de n_0 , α et n_p ($n_0 \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathbb{N}$ et $n_p \in \mathbb{N}^*$) :

$n_p = (\alpha + 1)^p n_0 \Leftrightarrow \ln n_p = p \ln(\alpha + 1) + \ln(n_0) \Leftrightarrow p = \ln(n_p/n_0)/\ln(\alpha + 1)$.

*Par exemple, avec 1 000 personnes convaincues au départ ($n_0 = 10^3$) et 65 millions de personnes à convaincre ($n_p = 65 * 10^6$), si chaque personne en convainc une autre par mois ($\alpha = 1$), le nombre de mois pour convaincre le nombre requis de personnes est $p = \ln(65 * 10^6 / 10^3) / \ln(1 + 1) \approx 16$.*

Exprimons α en fonction de p , n_0 et n_p ($p \in \mathbb{N}^*$, $n_0 \in \mathbb{N}^*$ et $n_p \in \mathbb{N}^*$) :

$n_p = (\alpha + 1)^p n_0 \Leftrightarrow \ln n_p = p \ln(\alpha + 1) + \ln(n_0) \Leftrightarrow \ln(\alpha + 1) = (1/p) \ln(n_p/n_0) \Leftrightarrow \alpha = (n_p/n_0)^{1/p} - 1$.

*Par exemple, avec une personne convaincue au départ ($n_0 = 1$) et 65 millions de personnes à convaincre ($n_p = 65 * 10^6$) en 2 ans et 2 mois ($p = 26$), le nombre personnes à convaincre chaque mois par chaque personne déjà convaincue est $\alpha = (65 * 10^6 / 1)^{1/26} - 1 \approx 1$.*